РОЗДІЛ 9. МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

СТОХАСТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ РИЗИКАМИ

STOCHASTIC MODEL OF RISK MANAGEMENT OPTIMIZATION

УДК 519.863

DOI: https://doi.org/10.32843/infrastruct54-42

Дебела І.М. [1]
к.с.-г.н., доцент
Херсонський державний
аграрно-економічний університет

Debela Iryna
Kherson State Agrarian
and Economic University

Економічна діяльність суб'єктів господарювання пов'язана з постійним пошуком ефективних управлінських рішень. Ускладнення внутрішніх та зовнішніх взаємозв'язків, наявність великої кількості непрогнозованих показників, факторів обмежують можливості вибору оптимальної стратегії розвитку об'єктів економіки без використання специфічних методів і моделей. Математична постановка задачі оптимізації управління економічним ризиком, як правило, починається з формалізації вхідних параметрів, визначення характеру та переліку змінних моделі, інформаційною базою для яких є попередні аналітичні оцінки та статистичні показники динаміки досліджуваного економічного об'єкта. Адекватна дійсності математична модель має враховувати динаміку, часткову невизначеність економічних процесів, наявні та можливі ризики як фактори випадкового характеру. У статті досліджується стохастична модель оптимізації управління економічним ризиком.

Ключові слова: *математичне моделювання, стохастична модель, управління ризиком, реалізація випадкових процесів, марковська властивість, перехідні ймовірності, критерій оптимізації.*

Экономическая деятельность субъектов хозяйствования связана с постоянным поиском эффективных управленческих решений. Осложнение внутренних и внешних взаимосвязей, наличие большого количества непрогнозируемых показателей, факторов ограничивают возможности выбора оптимальной стратегии развития объектов экономики без использования специфических методов и моделей. Математическая постановка задачи оптимизации управления экономическим риском, как правило, начинается с формализации входных параметров, определения характера и множества переменных модели, информационной базой для которых будут предварительные аналитические оценки и статистические показатели динамики исследуемого экономического объекта. Адекватная действительности математическая модель должна учитывать динамику, частичную неопределенность экономических процессов, имеющиеся и возможные риски как факторы случайного характера. В статье исследуется стохастическая модель оптимизации управления экономическим риском.

Ключевые слова: *математическое моделирование, стохастическая модель, управление риском, реализация случайных процессов, марковское свойство, переходные вероятности, критерий оптимизации.*

Economic activity of economic entities is associated with the constant search for effective management solutions: the optimal option for the allocation of resources, promising areas of development, the feasibility of introducing new technologies and developing new markets. Complications of internal and external relationships, the presence of a large number of unpredictable indicators limit the activities of an individual enterprise, do not allow to form an optimal strategy for the development of economic objects without the use of specific management methods and models. The basis for modeling management systems, including modeling of priority areas of agricultural sector, is to build a mathematical model. An adequate mathematical model must take into account the dynamics, stochastic uncertainty and unstructured management processes of economic objects, which is quite difficult to implement. In addition, the task of management and decision-making always contains a group of non-material, qualitative factors that are difficult to formalize, describe in quantitative terms, but which certainly have a decisive influence on the quality of the decision. Such "factors of influence" include the human factor. The result of human behavior can nullify any optimal solution, based on any adequate mathematical model. Accordingly, the mathematical model should also take into account the risk impact of the human factor, in the context of the entire management decision-making process. For management system models, there are a number of unresolved formalization and risk considerations. Mathematical formulation of the problem of optimizing economic risk management, as a rule, begins with the formalization of input parameters, qualitative and quantitative estimates of model variables, selection of mathematical tools. The information base of optimization models is the preliminary analytical and statistical indicators of the dynamics of the studied economic object. The article investigates the stochastic model of economic risk management. The set of implementations of random processes is considered as a limited set of random variables with a Markov property, which formalizes the problem of risk management, as a random process of obtaining the predicted benefit.

Key words: *mathematical modeling, stochastic model, risk management, implementation of random processes, Markov property, transient probabilities, optimization criterion.*

Постановка проблеми. Основою моделювання систем управління, у тому числі моделювання пріоритетних напрямів діяльності підприємств аграрного сектору, є побудова математичної моделі. Адекватна математична модель має враховувати динаміку, стохастичну невизначеність та неструктурованість процесів управління економічними об'єктами, що досить складно реалізувати. Окрім того, задача управління та прийняття рішень завжди містить групу нематеріальних, якісних факторів, які складно формалізувати, описати кількісними величинами, але які, безумовно, мають визначальний вплив на якість рішення, що приймається. До таких «факторів впливу» можна віднести і людський фактор. Результат поведінки людей може звести нанівець будь-яке оптимальне

[1] 1ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7990-4202

рішення на основі будь-якої адекватної математичної моделі. Відповідно, математична модель має також ураховувати ризиковий вплив людського фактору в контексті всього процесу прийняття рішення управління. Для моделей систем управління існує низка нерозв'язаних задач формалізації та врахування ризиків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теоретичні засади ризик-менеджменту (ризикологія) та математичні алгоритми побудови економіко-математичних моделей описано в роботах В.В. Вітлінського, Г.І. Великоіваненко, А.М. Єріна, О.І. Чумаченко. Моделювання та оптимізація економічних процесів АПК представлені в роботах С.І. Наконечного, П.М. Грицюка, Є.К. Міхєєва, В.О. Ушкаренко. Методи оцінювання ризиків аграрного сектору економіки описано в роботах А.В. Скрипник, С.С. Савіна, С.І. Наконечного. Вивчення останніх досліджень і публікацій актуалізує пошук нових методів побудови математичних моделей задач управління економічними процесами в умовах невизначеності та ризиків.

Постановка завдання. Метою дослідження є аналіз методів формалізації ризиків в оптимізаційних задачах управління економічною системою з частково прогнозованою динамікою.

Виклад основного матеріалу дослідження. Управління ризиком переважно проводиться в чотирьох напрямах: розподіл ризиків між усіма учасниками прийняття рішення, страхування ризиків, резервування засобів на покриття непередбачуваних витрат і диверсифікація [4, с. 140].

Відносяться до ризиків по-різному: дехто намагається їх не помічати, хтось уникає, деякі системно та свідомо намагаються управляти ризикованими процесами або компенсувати негативний влив ризикових факторів. Найбільш поширеним методом управління ризиками досі є створення матеріальних та фінансових резервів «про всяк випадок». Під ризиком прийнято розуміти ймовірність утрати об'єктом управління частини наявних ресурсів, недоотримання прибутків або появу додаткових витрат у результаті здійснення певного варіанту дій у процесі прийняття рішення.

Фактично ризик – це не сама подія, а статистична можливість її настання. Говорячи про можливість, маємо на увазі випадковий характер негативних явищ та процесів, що здійснюють безпосередній вплив на досліджуваний об'єкт, або об'єкт управління. Статистична оцінка факторів ризику можлива лише за умови, що функція розподілу ймовірностей виникнення ризикових ситуацій є стаціонарною в межах часового інтервалу дослідження. Для більшості категорій економічних ризиків це практично неможливо.

Ризик у задачах управління як фактор випадкового характеру можна кількісно оцінити такими числовими характеристиками, як математичне сподівання, дисперсія, коефіцієнт варіації, варіаційний розмах, інше [5, с. 86–101].

Абсолютне значення ризику можна виміряти величиною прогнозованих утрат – збитків від реалізації вибраної стратегії управління. Наприклад, як сумарний рівень збитків від упровадження стратегії з ризиковими параметрами:

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i , \qquad (1)$$

де D_i – кількісна оцінка ризику за параметром x_i;

x_i – статистична оцінка параметра за відсутності ризику;

α_i – розраховане значення ризику (ймовірнісна характеристика).

Оскільки ризик зумовлений недетермінованістю процесу, то чим менше варіація результату прийняття рішення, тим більш передбачуваним є рішення і, відповідно, менше ризик. Якщо варіація альтернативи рівна нулю, ризик повністю відсутній. Математично описати процес управління ризиком можна за алгоритмами стохастичного програмування. Стохастичне програмування формалізує задачі, вхідні параметри, змінні яких (усі, або частина з них) є випадковими величинами. Обмеженням на вхідні параметри таких моделей є відома функція розподілу ймовірностей випадкових подій або окремих реалізацій випадкових процесів. Основним підходом до рішення задач стохастичного програмування є перетворення початкової стохастичної моделі на рівнозначну – детерміновану [7, с. 798]. Детермінованість економіко-математичних моделей ризикових ситуацій передбачає такі припущення:

– незалежність випадкових подій: імовірність настання ризикової події не впливає на ймовірність настання інших ризикових ситуацій;

– максимально можливі збитки від ризикових станів не повинні перевищувати фінансових можливостей досліджуваного об'єкта.

Припустимо, що попередній аналіз дав змогу визначити множину альтернативних рішень системи, що складається з множини n-реалізацій деякого випадкового процесу $S = \left\{S_1, S_2, \cdots, S_{i,\cdots,} S_n\right\}$, $\left(i = 1 \div n\right)$. Тоді, для $t_i; \left(i = 0 \div n\right)$ – моментів часу дослідження за системою перехідні ймовірності між станами системи описують марковський ланцюг з обмеженою кількістю станів та неперервним часом. Множина випадкових величин $\left\{\varepsilon_{t_i}\right\}$ буде процесом Маркова тоді й тільки тоді, коли вона має властивість Маркова:

$$p\left\{\varepsilon_{t_i} = S_i \,|\, \varepsilon_{t_{i-1}} = S_{n-1}\right\}. \qquad (2)$$

Формула (2) визначає умовну ймовірністю того, що система находиться у стані S в момент t_i якщо в момент часу t_{i-1} знаходилася у стані S_{i-1}. Цю ймовірність, що описує зміну стану системи між послідовними моментами часу t_i та t_{i-1}

, називають однокроковою перехідною [7, с. 727]. Тоді за k кроків перехідну ймовірність можна записати формулою:

$$p_{x_i, x_{i+k}} = p\left\{\varepsilon_{t_{i+k}} = S_{i+k} \mid \varepsilon_{t_i} = S_n\right\}. \qquad (3)$$

Часові інтервали переходу між станами системи найчастіше вважають рівними, але можливі ситуації з нерівними часовими інтервалами.

Розглянемо множину $S = \left\{S_1, S_2, \cdots, S_{i,\cdots,} S_n\right\}$ як повну групу взаємовиключних станів досліджуваної системи в моменти часу $t_i;\left(i = 0 \div n\right)$. Уважаємо, що на початок дослідження $\left(t_0\right)$ система знаходиться в одному з можливих станів $S_j\left(j = 0 \div n\right)$ та відома імовірність перебування системи в стані S_j в момент часу t_0: p_j^0.

У припущенні марковського процесу однокрокову ймовірність переходу системи між можливими станами можна записати у вигляді матриці:

$$p = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{00} & \cdots & p_{0i} \ \dots \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1i} \cdots \\ p_{20} & p_{21} & \cdots & p_{2i} \cdots \\ \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (p_{ij} \geq 0). \qquad (4)$$

Винагороди – доходи (витрати) від вибору альтернатив управління для такого процесу прийняття рішення теж можна представити у вигляді матриці, елементами якої є розмір доходу або витрат від переходу з одного стану системи до іншого. Матриця перехідних імовірностей та матриця винагород залежать від сформованих альтернатив та їх статистичної оцінки. На етапі формування множини альтернатив та формалізації матриці перехідних імовірностей досить часто застосовується метод експертних оцінок [5, с. 12].

Можливі комбінації S_i будуть підмножинами множини S і фактично рівнем критерію граничного ризику вибраного m-варіанту реалізації випадкового процесу:

$$K^m = \left\{S_1^m, S_2^m, \cdots, S_j^m, \cdots, S_k^m\right\}, \qquad (5)$$

$$S_j^m \in S, j = 1 \div k; j \leq n.$$

Позначимо M=$\left\{M_i\right\}$ множину подій із відсутністю ризику для вибраної альтернативи A_j. Тоді для усіх можливих альтернатив із не нульовим ризиком матимемо множину критеріїв: $\tilde{K} = \left\{K_i^j, M_i\right\}$, оцінкою яких будуть імовірності $p_i\left(K_i^j\right)$ та $p_i\left(M_i\right)$, що задовольняють умову нормування:

$$\sum_{j=1}^{k} p_i\left(K_i^j\right) + p_i\left(M_i\right) = 1. \qquad (6)$$

Кожній комбінації критеріїв K_i^j можна поставити у відповідність вартісну оцінку альтернатив B_i^j, тоді вартість реалізації ризикованої альтернативи:

$$R_i = \sum_{j=1}^{k} B_i^j \cdot p_i\left(K_i^j\right). \qquad (7)$$

Якщо ймовірності ризикових подій рівні між собою $p_i\left(K_i^j\right) = p_i$, то формула (7) матиме вигляд:

$$R_i = p_i \sum_{j=1}^{k} B_i^j. \qquad (8)$$

Аналогічно, якщо вартісна оцінка подій з відсутністю ризику $M = \left\{M_i\right\}$ відома і дорівнює V_i = $v_i \cdot p_i\left(M_i\right)$, то сумарний результат реалізації стратегії – прогнозованого стану системи можна обчислити різницю:

$$V_i - R_i = Z_i. \qquad (9)$$

Відповідно, оптимальним станом системи буде:

$$\tilde{Z} = \max_{\tilde{K}} Z_i = \max_{\tilde{K}}\left(V_i - R_i\right). \qquad (10)$$

Розглядаючи окремі реалізації ризикових стратегій як множину випадкових величин, формалізовану задачу управління ризиком можна записати як випадковий процес отримання прогнозованої вигоди – рівня прибутковості [4, с. 13].

$$U\left(t, x\right) = U + \alpha\left(t, x\right) - \beta\left(t, x\right), \qquad (11)$$

де $\alpha\left(t, x\right); \beta\left(t, x\right)$ – випадкові процеси, реалізація яких для моментів часу $t > 0$ і вибраних параметрів системи управління відома або прогнозована;

$\alpha\left(t\right)$ – плановий дохід, надходження, платежі;

$\beta\left(t\right)$ – прогнозовані витрати, виплати;

$\alpha\left(t = 0\right) = 0; \beta\left(t = 0\right) = 0$;

$U > 0$ – початковий стан системи, що фактично є «стартовим капіталом» на момент часу $t = 0$;

x – параметр моделі:

$x \in R^n\left\{-\infty < a_i \leq x_i \leq b_i < +\infty\right\}$, $i = 1 \div n$.

Обмежимо реалізацію випадкового процесу (11) лише двома випадковими подіями, що утворюють повну групу: 1 – доходи перевищують витрати, 2 – витрати перевищують доходи.

Тоді, для позитивної динаміки процесу $U\left(t, x\right)$ необхідною буде умова:

$$\frac{M\left(\alpha\left(t_i, x\right)\right)}{M\left(\beta\left(t_i, x\right)\right)} \geq 1, \qquad (12)$$

де $M\left(\alpha\left(t_i, x\right)\right), M(\beta\left(t_i, x\right)$ – математичні сподівання реалізацій випадкових процесів у момент часу t_i.

Умову (12) можна врахувати додатковим обмеженням:

$$\left(1 - p(U\left(t, x\right)\right) \leq \varepsilon, \qquad (13)$$

де $\varepsilon > 0$ – величина високого порядку малості.

Критерієм оптимальності для задач управління ризиками буде максимум вартісної оцінки стану системи в кінці часового інтервалу дослідження. Тобто задача управління ризиком є задачею оптимізації функції:

$$\max_{X \in R^n} M\left(X\right) = \max_{x \in R^n} M\left[\alpha\left(t, x\right) - \beta\left(t, x\right)\right], \qquad (14)$$

де $M\left(X\right)$ – математичне сподівання випадкової величини $\left[\alpha\left(t, x\right) - \beta\left(t, x\right)\right]$.

Якщо оптимальне рішення задачі оптимізації (11)–(14) позначити X*, тоді оцінка ризику

$R(t, X^*) = 1 - p(U(t,x))$ забезпечує позитивну динаміку процесу управління.

Економічною оцінкою окремої альтернативи $U(t,x)$ з урахуванням формул (1), (11) буде величина:

$$K(t) = K_0 + A(t) - B(t), \qquad (15)$$

де $K(t)$ – розмір капіталу на розрахунковий момент часу t;

K_0 – початковий капітал;

$A(t)$ –доходи, надходження, прибутки;

$B(t)$ – відрахування, виплати, витрати.

Числове значення ризику є добутком значень випадкової величини X(t) – реалізацій управління в момент часу t на вектор інтервальних оцінок ризику R:

$$\delta = \mathrm{R}^*\mathrm{X}(t) = A(t) - B(t), \qquad (16)$$

де $R \in (0; R_{max})$; R_{max} – верхня межа допустимого ризику.

Тоді, рівність (15):

$$K(t) = K_0 + \mathrm{R} \cdot \mathrm{X}(t). \qquad (17)$$

Основним обмеженням моделі (17) є припущення про відому функцію розподілу ймовірностей випадкової величини *F(X(t)).*

Оптимальний рівень капіталу на розрахунковий момент часу t визначає стохастична цільова функція

$$Z = \max(K_0 + R \cdot X). \qquad (18)$$

Уважаємо, що на момент $t = 0$ допустимий рівень ризику відомий, а за $t = 1$ рівень ризику є невизначеною випадковою величиною.

Якщо припустити, що функція розподілу значень X(t) однорідна, неперервна і диференційована на інтервалі $[0,t]$, то задача вибору оптимального рівня ризику зводиться до визначення математичного сподівання випадкової величини – рівня прибутковості Z на часовому інтервалі дослідження

$$Z = \max_{K} Z_i = \max_{R\in(0;R_{\max})} Z(R, K_0) = M[Z] = \int_0^t \mathrm{X}(t)\, f(X(t))dt, \qquad (19)$$

де *f(X)* – диференційна функція розподілу випадкової величини X(t).

Варіація рівня прибутковості в межах досліджуваного часового інтервалу є додатковою характеристикою для визначення граничних значень оцінок ризиків:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \left(\int_0^t \left[\mathrm{X}(t) - M(X) \right]^2 f(\mathrm{X}(t)) dt \right)^{1/2}. \qquad (20)$$

Обчислення оптимального рівня ризику ускладняється, якщо умова неперервності функції розподілу *X(t)* на інтервалі дослідження $[0,t]$ не виконується, тобто існують *k* точок розриву $\left[x_1(t = t_{k=1}), x_2(t = t_k + \Delta t), \ldots \right]$. Розбиття інтервалу дослідження на часткові інтервали, межі яких є точками розриву, усуває цю складність.

Висновки з проведеного дослідження. Деякі математичні моделі управління з урахуванням ризику настільки складні, що оптимізація їх рішень доступними методами неможлива взагалі або сам процес моделювання є економічно не доцільним. У такому разі, як правило, застосовується евристичний алгоритм, оснований на практичному досвіді та емпіричних правилах. Моделювання реальних задач управління має бути результатом спільної роботи замовника та колективу фахівців: аналітиків-математиків та практиків. Розроблення алгоритмів, пошук нових методів та математичних моделей задач управління є завданням не лише сьогодення, а й майбутнього математичного моделювання.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК:

1. Борчик Е.Ю., Дебела И.Н., Бородин С.И. Нечеткая модель определения степени влияния внешних факторов на ЛПР. *Інформаційні технології в моделюванні :* матеріали ІІ Всеукр. науково-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, м. Миколаїв, 23–24 березня 2017 р. Миколаїв, 2017. С. 104–105.

2. Борчик Е.Ю., Дебела И.Н., Зверев В.К. Выбор релевантных альтернатив принятия решений в эргатических системах критического применения. *Інформаційні технології в моделюванні :* матеріали ІІІ Всеукр. науково-практ. конф. студентів, аспірантів та молодих вчених, м. Миколаїв, 22–23 березня 2018 р. Миколаїв, 2018. С. 88–89.

3. Вітлінський В.В., Великоіваненко Г.І. Ризикологія в економіці та підприємництві : монографія. Київ : КНЕУ, 2004. 480 с.

4. Вітлінський В.В., Верченко П.Г. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2000. 292 с.

5. Єріна А.М. Статистичне моделювання та прогнозування : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 2001. 170 с.

6. Погоруй А.О. Вступ до теорії випадкових процесів. Житомир : ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 70 с.

7. Хэмди А., Таха. Введение в исследование операций : учебное пособие ; 6-е вид. Москва : Вильямс, 2001. 912 с.

REFERENCES:

1. Borchik E.Y., Debela I.N., Borodin S.I. (2017) Nechetkaia model opredelenyia stepeny vlyianyia vneshnykh faktorov na LPR [Fuzzy model for determining the degree of influence of external factors on the decision maker]. *Proceedings of the Information technology in modeling* (Ukrainian, Mykolaiv, March 23–24, 2017). Mykolaiv: MNU named after V.O. Sukhomlinsky, pp. 104–105.

2. Borchik E.Y., Debela I.N., B Zverev V.K. (2018) Vibor relevantnikh alternatyv pryniatyia reshenyi v эrhatycheskykh systemakh krytycheskoho prymenenyia [Selection of relevant decision-making alternatives in argotic systems of critical application]. *Proceedings of the Information technology in modeling* (Ukrainian,

Mykolaiv, March 22–23, 2018). Mykolaiv: MNU named after V.O. Sukhomlinsky, pp. 88–89.

3. Vitlinsky V.V., Velikoivanenko G.I. (2004) Ryzykolohiia v ekonomitsi ta pidpryiemnytstvi [Riscology in economics and business]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)

4. Vitlinsky V.V., Verchenko P.G. (2000) Analiz, mode-liuvannia ta upravlinnia ekonomichnym ryzykom [Analysis, modeling and management of economic risk]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)

5. Erina A.M. (2001) Statystychne modeliuvannia ta prohnozuvannia : navch [Statistical modeling and forecasting]. Kyiv: KNEU. (in Ukrainian)

6. Pogoruy A.O. (2020) Vstup do teorii vypadkovykh protsesiv [Introduction to the theory of random processes]. Zhytomyr: ZhSU them. I. Franko. (in Ukrainian)

7. HamdyA., Taha (2001) Vvedenye v yssledovanye operatsyi [Introduction to operations research]. Moscow: Williams. (in Russian)